UNIT-5

Topics :-

→ Elasticity.
→ Strain and Stress.
→ Elastic limit.
→ Hooke's Law.
→ Modulas of rigidity.
→ Poisson's ratio.
→ Bulk modulus.
→ Relation connecting different elastic constants.
→ Wisting couple of a cylinder (Solid and hollow)
→ Bending moment.
→ Cantilever.
→ Young modulus by bending of beam.
→ Viscocity poiseuille's equation of liquid flow through a narrow tube.
→ Equations of continuity.
→ Euler's equation.
→ Bernoulli's theorem.
→ Viscous fluids.
→ Streamline and Turbulent flow.
→ Poiseuille's law.
→ Coefficient of Viscocity.
→ Stoke's Law
→ Surface tension and molecular interpretation of Surface tension.
→ Surface energy.
→ Angle of contact.
→ Wetting.

Scanned with CamScanner

Deformation force - विरूपक बल

→ Elasticity :-

→ **Stress** :- (प्रतिबल)

1. Longitudal Stress (अनुदैर्ध्य प्रतिबल) $\frac{F}{A}$
2. Normal Stress (अभिलम्ब प्रतिबल)
3. Tangential Stress (स्पर्शरेखा या अनुप्रस्थ प्रतिबल)

→ **Strain** :- विकृति

1. Longitudal Strain (अनुदैर्ध्य विकृति) $\frac{l}{L}$
2. Volume Strain (आयतन विकृति) $\frac{v}{V}$
3. Shearing Strain (अपरूपण विकृति) (θ)

→ **Hooke's Law** :-

$$\Rightarrow \text{Stress} \propto \text{Strain}$$

$$\Rightarrow \text{Stress} = e\ \text{Strain}$$

$$\Rightarrow e = \frac{\text{Stress}}{\text{Strain}}$$

e = Hooke's coefficient or modulus of Elasticity

1. (Longetudial) Young Modulus :-

$$\text{Stress} \propto \text{Strain}$$

$$\text{Stress} = Y\ \text{Strain}$$

$$(\text{Young modulus})\ Y = \frac{\text{Stress}}{\text{Strain}} \Rightarrow Y = \frac{F/A}{l/L}$$

$$Y = \frac{FL}{Al}$$

2. Volume Modulus / Bulk modulus :-

$$K = \frac{\text{Stress}}{\text{Strain}} \Rightarrow \frac{-P}{\frac{v}{V}} = \frac{-PV}{v}$$

Scanned with CamScanner

② दाब बढ़ाने पर
आयतन कम होता है

③ Modulus of rigidity (Shearing modulus) :-

अपरूपण या दृढ़ता $\eta = \dfrac{\text{Tangential Stress}}{\text{Shearing Strain}}$

$$\eta = \frac{F/A}{\phi} = \frac{F}{A\phi}$$

→ Poission's Ratio :-

Lateral Strain ∝ Longitudial Strain

$$\alpha \propto \beta$$

$$\alpha = \sigma\beta \qquad \sigma = \text{Poission's ratio}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{\alpha}{\beta}}$$

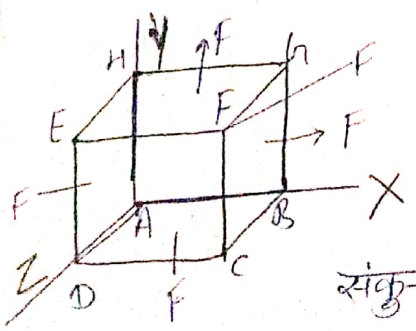
V.V. Imp

Important equations :-

① $Y = 3K(1-\sigma)$ ② $Y = 2\eta(1+\sigma)$

③ $\frac{9}{Y} = \frac{3}{\eta} + \frac{1}{K}$ or $Y = \frac{9K\eta}{\eta + 3K}$

④ $\sigma = \frac{3K - 2\eta}{2\eta + 6K}$



① $Y = 3K(1-\sigma)$

घन ABCDEFGH
प्रत्येक भुजा - l है
प्रत्येक फलक बाहर → F
लम्बाई में वृद्धि → α एकांक लंबाई में वृद्धि
संकुचन में वृद्धि → β एकांक लंबाई में वृद्धि X-दिशा में बल के कारण लं. में वृद्धि

अर्थात्

AB → X में बल F {प्रतिबल $= \frac{F}{l^2}$} → लंबाई में वृद्धि $= \frac{F}{l^2} \times l\alpha = \frac{F\alpha}{l}$ / $\frac{F}{l^2} \cdot l$

संकुचन {AH — Y, AD — Z} → $\frac{F\beta}{l}$ } संकुचन

* Vice Versa

घन के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक

$$Y = \frac{\text{अनुदैर्ध्य प्रतिबल}}{\text{अनुदैर्ध्य विकृति}} = \frac{F/l^2}{F\alpha/l^2} = \frac{1}{\alpha}$$

या $\alpha = \frac{1}{Y}$ — (1)

Poisson's ratio

$$\sigma = \frac{\text{अनुप्रस्थ विकृति}}{\text{अनुदैर्ध्य विकृति}} = \frac{\beta}{\alpha}$$

समी. (1) से या $\beta = \sigma\alpha = \frac{\sigma}{Y}$ — (2)

अब X, Y, Z → लम्बाई वृद्धि — e_x, e_y, e_z है तो

$$e_x = \left(\frac{F\alpha}{l}\right) - \left(\frac{F\beta}{l}\right) - \left(\frac{F\beta}{l}\right) = F(\alpha - 2\beta)/l$$

$$e_y = -\left(\frac{F\beta}{l}\right) + \left(\frac{F\alpha}{l}\right) - \left(\frac{F\beta}{l}\right) = F(\alpha - 2\beta)/l$$

अनुदैर्ध्य विकृति $= \frac{\text{लं. में वृद्धि}}{\text{प्रा. लं.}} = \frac{F\alpha/l}{l} = F\alpha/l^2$

$$e_z = -\left(\frac{F\beta}{l}\right) - \left(\frac{F\beta}{l}\right) + \left(\frac{F\alpha}{l}\right) = F(\alpha - 2\beta)/l$$

$$e_x = e_y = e_z = e = F(\alpha - 2\beta)/l$$

$$e = \frac{F}{l}\left(\frac{1}{Y} - 2\frac{\sigma}{Y}\right) = \frac{F}{lY}(1 - 2\sigma) \quad \text{— (3)}$$

⇒ बल के कारण प्रत्येक भुजा की लम्बाई बढ़कर $(l+e)$ हो जाती है। अतः घन का अन्तिम आयतन $= (l+e)^3 =$

$l^3 + e^3 + 3e^2 l + 3l^2 e = (l^3 + 3el^2)$ { $e \ll 1$, e^2, e^3 नगण्य }

Scanned with CamScanner

घन के आयतन में परिवर्तन = अन्तिम आयतन - प्रारम्भिक आयतन

$= (l^3 + 3el^2) - l^3 = 3el^2$

आयतन विकृति = $\frac{\text{आयतन में परिवर्तन}}{\text{प्रा. आयतन}} = \frac{3el^2}{l^3} = \frac{3e}{l}$

$= \frac{3}{l}\frac{F}{lY}(1-2\sigma) = \frac{3F}{l^2Y}(1-2\sigma)$ — (4)

आयतन प्रत्यास्थता गुणांक $K = \frac{\text{अभिलम्ब प्रतिबल}}{\text{आयतन विकृति}} = \frac{F/l^2}{3F(1-2\sigma)/l^2Y}$

$K = \frac{Y}{3(1-2\sigma)}$ या $\boxed{Y = 3K(1-2\sigma)}$

(iii) $\frac{9}{Y} = \frac{3}{\eta} + \frac{1}{K}$ या $Y = \frac{9K\eta}{\eta + 3K}$

Relation → $Y = 3K(1-2\sigma)$ — (1)

Relation → $Y = 2\eta(1+\sigma)$ — (2) $\sigma = \frac{Y}{2\eta} - 1$ — (3)

समी० (1) में σ का मान रखने पर :-

$Y = 3K\left[1 - 2\left(\frac{Y}{2\eta} - 1\right)\right] = 3K\left(1 - \frac{Y}{\eta} + 2\right)$

$\Rightarrow Y = 3K\left(3 - \frac{Y}{\eta}\right)$

$\Rightarrow Y\left(1 + \frac{3K}{\eta}\right) = 9K$

$\Rightarrow \boxed{Y = \frac{9K\eta}{\eta + 3K} = \frac{9}{Y} = \frac{3}{\eta} + \frac{1}{K}}$

(iv) $\sigma = \frac{3K - 2\eta}{2\eta + 6K}$

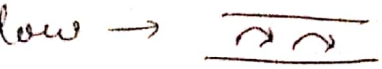
$Y = 3K(1-2\sigma)$ तथा $Y = 2\eta(1+\sigma)$ से

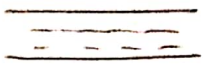
$\Rightarrow 3K(1-2\sigma) = 2\eta(1+\sigma)$

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow \boxed{\sigma(2\eta + 6K) = 3K - 2\eta \Rightarrow \sigma = \frac{3K - 2\eta}{2\eta + 6K}}$

Stream line flow & turbulent flow :-

turbulent flow → 

Stream line flow 

Reynold's Number :-

द्रव किसी नली में बह रहा है तो Reynold's के अनुसार $-V_e$ का मान

(i) $V_e \propto \frac{1}{\rho}$ (नली का घनत्व)

(ii) $V_e \propto \frac{1}{\sigma}$ (नली की त्रिज्या)

(iii) $V_e \propto \eta$ (श्यानता गुणांक)

$V_e \propto \frac{\eta}{\sigma \times \rho}$ या $V_e = \frac{K\eta}{\sigma\rho}$

K = constant → जिसे Reynold संख्या कहते हैं।

Stoke's Law :-

गोलाकार सूक्ष्म पिण्ड - श्यान माध्यम में - ऊपर नीचे गिरता है तो प्रारंभ में पिण्ड पर गुरुत्वीय बल के कारण बल लगता है जिससे त्वरण होता है।

→ कुछ दूरी बाद वेग नियत रहता है।

श्यान बल $F \propto \eta \sigma V$

$$\boxed{F = 6\pi\eta\sigma V}$$

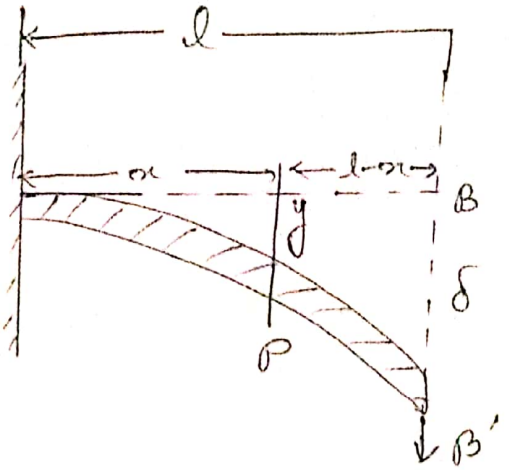
Scanned with CamScanner

④

Cantilever :-

प्रारम्भिक तार का L.
D - लंबाई में वृद्धि
व्यास में कमी D हो तो
दृढ़ , l - लम्बाई
भारित ω, B' - झुकाव
X - Y↓

l. x दूरी पर



P पर भार ω के कारण प्रत्यानयन बल = ω(l - x)
मुड़ी हुई संकुचन में है अत: बंकन आघूर्ण (Bending Torque) = प्रत्यानयन बल (Restoring force)

$$\frac{YI}{R} = \omega(l-x) \quad \text{— ①}$$

Y = Young Modulus   R = Radius of Bending
I = geometrical Inertia

$$R = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} \Big/ \frac{d^2y}{dx^2}$$

y - दण्ड का x दूरी पर अवनयन है।
तथा y का मान कम है अत: $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 << 1$ होगा।

$$\therefore R = 1 \Big/ \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{— ②}$$

समी० ① में मान रखने पर —

$$YI\frac{d^2y}{dx^2} = \omega(l-x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\omega}{YI}(l-x) \quad \text{— ③}$$

Scanned with CamScanner

अब eq ③ का हल करके $x = l$ का झुकाव ज्ञात किया जा सकता है
eq ③ का Integration करने पर :-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{YI}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + c_1 \quad \text{— ④}$$

→ c_1 = constant का मान ज्ञात करने हेतु :-

$x = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$ में eq ④ से $c_1 = 0$

अतः $$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{YI}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) \quad \text{— ⑤}$$

पुनः समी० ⑤ का Integration करने पर :-

$$y = \frac{w}{YI}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + c_2 \quad \text{— ⑥} \quad \left\{\begin{matrix} y = 0 \\ x = 0 \end{matrix}\right\} \; c_2 = 0$$

अब अवनमन y → A से x दूरी पर

$$y = \frac{w}{YI}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \quad \text{— ⑦}$$

A से l दूरी पर माना अवनमन $y = \delta$
$x = l$, $y = \delta$

तो $$\delta = \frac{w}{YI}\left(\frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{6}\right) \text{ या } \delta = \frac{wl^3}{3YI} \quad \text{— ⑧}$$

यदि $w = m$ द्रव्यमान तो

$$\delta = \frac{mgl^3}{3YI}$$

यदि दण्ड चौड़ाई b, मोटाई d है तो $I = \frac{bd^3}{12}$ से :

$$\text{अतः } \delta = \frac{4wl^3}{Ybd^3}$$

Scanned with CamScanner